PROBLEMA 1

a) Il triangolo dato è la metà di un triangolo equilatero; quindi i cateti hanno misura:

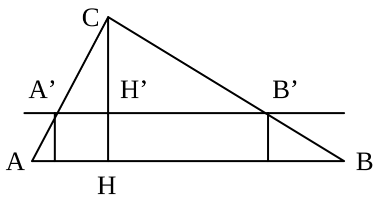
AC=a/2, BC=$a\sqrt{3}/2$.

Da qui si ricavano le limitazioni da imporre ad x: $a/2 \le x \le a\sqrt{3}/2$.

b) L'area del quadrilatero mistilineo si ottiene per differenza dell'area dei due settori circolari S_{BPQ} e S_{APR} dall'area del triangolo $S_{ABC} = a^2\sqrt{3}/8$. Risulta $S_{BPQ} = x^2\pi/12$ e $S_{APR} = (a-x)^2\pi/6$; dunque: $S_{PQCR} = a^2\sqrt{3}/8 - x^2\pi/12 - (a-x)^2\pi/6 = a^2\sqrt{3}/8 - \pi/12\left(x^2 + 2(a-x)^2\right)$. Per trovare il minimo e il massimo di questa espressione basta trovare il massimo e il minimo (rispettivamente) della parabola di equazione $y = x^2 + 2(a-x)^2$, $y = 3x^2 - 4ax + 2a^2$.: il suo vertice ha coordinate $x_V = 2a/3,\ y_V = a^2(\sqrt{3}/8 - \pi/18)$. A $x_V = 2a/3$ (punto di minimo) corrisponde il massimo di $S_{PQCR}(2a/3) = a^2(\sqrt{3}/8 - \pi/18)$.

Il massimo della parabola nell'intervallo dato corrisponde all'estremo più lontano dal vertice, in questo caso $x = a\sqrt{3}/2$, cui corrisponde il minimo di $S_{PQCR}\left(a\frac{\sqrt{3}}{2}\right) = a^2\left(\frac{\sqrt{3}}{8} - \frac{17-8\sqrt{3}}{48}\pi\right)$.

c)



L'altezza del triangolo ABC relativa all'ipotenusa è $a\sqrt{3}/4$

In riferimento alla figura , osserviamo che i triangoli ABC e $A'B'C$ sono simili; quindi, posto $y = \overline{A'B'}$, si ha $\overline{CH'} = y\sqrt{3}/4$ e di conseguenza $\overline{HH'} = (a-y)\sqrt{3}/4$.

L'area del rettangolo richiesto è pertanto:

$S = y(a-y)\sqrt{3}/4$, che è l'equazione di una parabola con concavità rivolta verso il basso.

Il massimo si avrà in corrispondenza del vertice della parabola $y_V = a/2$. Per determinare la retta $A'B'$, basta sostituire questo valore nell'espressione di $\overline{CH'}$ ottenendo $\overline{CH'} = a\sqrt{3}/8$.

d) Il solido descritto dal testo è formato da due piramidi aventi per base comune il quadrato di lato CH e vertici rispettivamente A e B. Ricordando che è $CH = a\sqrt{3}/4$, il volume del solido è:

$$V = \frac{1}{3}\cdot\frac{3a^2}{16}\cdot a = \frac{a^3}{16}.$$

Soluzioni a cura del Centro PRISTEM dell'Università Bocconi