

Problema Ordinamento

Problema 2

1. I due punti di intersezione H e K (da sinistra a destra) tra le due semicirconferenze hanno ordinata $y = \frac{1}{2}$. Allora, l'angolo BCK è uguale a $\frac{\pi}{6}$ e quindi l'angolo HCK vale $\frac{2\pi}{3}$. L'area richiesta è uguale al doppio (per ragioni di simmetria) della differenza tra l'area del settore circolare, con angolo al centro HCK , e quella del triangolo HCK :

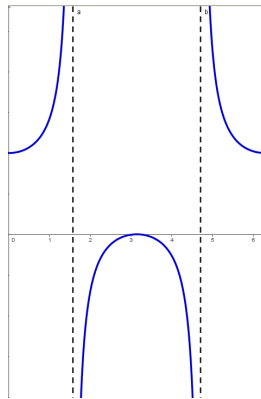
$$A = 2\left(\frac{\pi}{3} - \frac{\sqrt{3}}{4}\right) = \frac{2}{3}\pi - \frac{\sqrt{3}}{2}$$

2. Chiamiamo con $2x$ la base del rettangolo, con $0 < x < 1$. La sua area è allora data da $A = 2x\sqrt{1-x^2}$. Per trovare il rettangolo di area massima, consideriamo la funzione $y = 2x\sqrt{1-x^2}$ e la sua derivata prima $y' = \frac{-4x^2+2}{\sqrt{1-x^2}}$. Da $y' \geq 0$ per $|x| \leq \frac{\sqrt{2}}{2}$, deduciamo che il rettangolo ha area massima quando è $x = \frac{\sqrt{2}}{2}$
3. Come immediata applicazione del teorema sul triangolo rettangolo, abbiamo $S_1 = \frac{\sin x(1 + \cos x)}{2}$ e $S_2 = \frac{\sin x |\cos x|}{2}$. Risulta allora $f(x) = \frac{1 + \cos x}{|\cos x|}$
4. Consideriamo la funzione $g(x) = \frac{1 + \cos x}{\cos x}$ e studiamola ad esempio nell'intervallo $[0, 2\pi)$ con $x \neq \pi/2$ e $x \neq 3\pi/2$. Il segno di g coincide con quello del coseno; inoltre è $g(\pi) = 0$. Le rette $x = \pi/2$ e $x = 3\pi/2$ sono asintoti verticali:

$$\lim_{x \rightarrow \pi/2^\pm} g(x) = \mp \infty$$

$$\lim_{x \rightarrow 3\pi/2^\pm} g(x) = \pm \infty$$

Il segno della derivata prima $g'(x) = \sin x / \cos^2 x$ conferma il fatto che $x = \pi$ è punto di massimo relativo per la funzione g .



Il grafico di f si ottiene ribaltando attorno all'asse x le parti negative del diagramma di g .

